

基礎認知● **命題 (Statement or Proposition)**

命題 是一句能判斷其內容為 真 (True) 或 假 (False) 的 陳述句子。

例子：所有狗都有四條腿。

● **原子命題 (Atomic Statement)** 最簡單的不可再分的命題。● **假命題 (Open Sentence)** 不能（或沒有意義）被判斷其為真或假的語句。

試判斷以下句子能否稱為「**命題**」。

1. 不准飲食。
2. $10 \div 2$ 。
3. $10 \div 2 = 5$ 。
4. 今天是星期日。
5. 中國是一個人口最多的國家。
6. 我正在說謊
7. 把八粒糖平均分成四份。

● **真值 (Truth value)**

命題的值稱真值，真值有 T、F 兩種。

例子：2009年9月12日是星期六。

判別以下語句為命題？如果是命題，指出其真值。

1. 所有花都有五片花瓣。
2. 221 是質數。
3. 香港科技大學校長叫 Tony Chan。
4. 香港人真沒有禮貌。

命題聯結詞● **否定式 (Negation)**

否決式 是從命題加入或刪除「不」字而成。

例子： 香港今天下雨。 香港今天不下雨。（否定式）

~	p
F	T
T	F

否定式 的真值表

- **合取式 (Conjunction)**

把兩個命題用「及」、「並且」意思連結的新命題。

例子：她打籃球 並且 打乒乓球。

p	\wedge	q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	F	F

合取式 的真值表

- **析取式 (Disjunction)**

把兩個命題用「或」意思連結的新命題。

例子：小玲是走路 或 乘車回學校的。

p	\vee	q
T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	F

析取式 的真值表

- **條件語句 (Conditional)**

兩個命題以「若…，則…」、「如果…，那麼…」的意思表示。 p 為 前題，q 為 結論。

例子：如果不努力學習，那麼數學科會不合格。

p	\rightarrow	q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

條件語句 的真值表

命題： $p \rightarrow (p \vee \sim p)$ 的真值是甚麼？

- **雙條件語句 (Biconditional)**

雙條件語句 與 條件語句 相似，皆是以兩個命題以「若…，則…」的意思表示。

但，雙條件式中的前項與後項則是互為因果關係，即 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 。

簡單來說， $p \leftrightarrow q$ 即表示 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 。

例子：四邊形 ABCD 是平行四邊形 當且僅當四邊形 ABCD 的對邊平行。

p	\rightarrow	q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

p	\leftarrow	q
T	T	T
T	T	F
F	F	T
F	T	F

p	\leftrightarrow	q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	T	F

雙條件語句 的真值表

複合命題 (Compound Statement)

複合命題為原子命題與命題聯結詞結合構成新的命題。基本符號有：命題、聯結詞及括號。理解複合命題時，我們會根據以下聯結詞的優先次序作出運算，找出複合命題的真值。

\sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow 。

- 重言式 或 恆真式 (Tautology)

在任何情況下，重言式的真值全部都是 T。

例一：請列出 $p \rightarrow p \vee q$ 的真值表。

p	\rightarrow	p	\vee	q
T		T		T
T		T		F
F		F		T
F		F		F

$\therefore p \rightarrow p \vee q$ 是 / 不是 一個重言式。

例二：請列出 $p \vee (q \vee (\sim p \wedge \sim q))$ 的真值表。

p	\vee	(q	\vee	(\sim	p	\wedge	\sim	q))

$\therefore p \vee (q \vee (\sim p \wedge \sim q))$ 是 / 不是 一個重言式。

練習

1. 設 p 為：他將去旅行， q 為：他有時間。將以下命題符號化。
 - (a) 他將去旅行，僅當他有時間。
 - (b) 他沒有時間，他不去旅行。
2. 說明下列哪些是 真命題，為甚麼？
 - (a) 打開車門。
 - (b) 若 $1+1=2$ ，則太陽從西方升起。
 - (c) 若 $1+2=4$ ，則太陽從西方升起。
3. 將下列命題符號化。
 - (a) 小明學習好，運動也好。
 - (b) 若 $A=1$ 和 $B=2$ ，則 $A+B=3$ 。
 - (c) 李先生明天將去旅行，或者陳先生明天要去工作。
 - (d) 小儀 或 小美 中的一人會當 3A 班班長。
 - (e) 如果妳不去日本，那麼我也不去日本。
 - (f) 我既不吸煙，也不飲酒，我常做運動。
4. 請指出各命題中的主聯結詞。
 - (a) $((\sim p) \vee (\sim q)) \rightarrow (p \wedge ((\sim r) \rightarrow q))$ 。
 - (b) $(\sim q) \wedge ((p \rightarrow (\sim r)) \rightarrow q)$ 。
 - (c) $(p \rightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))) \leftrightarrow (\sim p)$ 。
 - (d) $\sim p \vee q \rightarrow \sim (r \wedge p) \vee s$ 。
 - (e) $\sim \sim q \leftrightarrow p \wedge \sim r$ 。
 - (f) $\sim (\sim p \rightarrow \sim (q \leftrightarrow r) \vee p)$ 。

5. 請列出下列各命題的真值表。

(a) $\sim\sim p$

(b) $\sim p \vee \sim q$

(c) $\sim(p \vee p)$

(d) $\sim(p \rightarrow \sim q)$

6. 試找出下列各命題中哪一個是重言式。

(a) $\sim p \vee p$

(b) $(p \rightarrow \sim p) \wedge p$

(c) $p \vee q \rightarrow p$

等價命題

- **等價命題 (Equivalent Statements)**

兩個命題在所有情況下都有相同的真值時，則被形容為 等價。

$p \equiv q$ 是表示命題 p 和 命題 q 等價，其中符號 “ \equiv ” 在此並不是聯結詞。

要證明 p 等價於 q ，可以證明兩個命題都有相同的真值表。

常用定律

- (a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ 交換律 (Commutative law)
 $p \vee q \equiv q \vee p$
- (b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ 結合律 (Associative law)
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- (c) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 分配律 (Distributive law)
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- (d) $p \wedge p \equiv p$ 等冪律 (Idempotent law)
 $p \vee p \equiv p$
- (e) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (De Morgan law)
 $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

例一：證明 $\sim \sim p \equiv p$ 雙否定律 (Law of double negation)

例二：證明 $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

例三：證明 $p \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge q$

練習

1. 試證明下列各個等價命題。

(a) $(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$

(b) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

(c) $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p$

(d) $p \rightarrow q \vee r \equiv p \wedge \sim q \rightarrow r$

- **蘊涵 (Implication)**

若命題 $p \rightarrow q$ 是重言式，則 p 蘊涵 q (p implies q)，並以 $p \Rightarrow q$ 表示。
符號 “ \Rightarrow ” 在此並不是聯結詞，而是表示左方的命題 蘊涵 右方的命題。

例一：請證明下列蘊涵關係。

(a) $p \wedge q \Rightarrow p$

(b) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

例二：試利用命題 $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r) \rightarrow (r \rightarrow p)$ 的真值表來判斷下列語句的推理是否正確。

前提：如果我喜歡吃雪糕，我會很肥胖。 我很肥胖或我需要減肥。

結論：如果我需要減肥，我是喜歡吃雪糕的。

解：設 p 為：我喜歡吃雪糕， q 為：我很肥胖， r 為：我需要減肥。

$(p \rightarrow q)$	\wedge	$(q \vee r)$	\rightarrow	$(r \rightarrow p)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

例三：我媽媽過生日，我送一束鮮花給她，除非我工作很忙。今天我沒有送鮮花給媽媽，今天是媽媽的生日，由此是否可推得“今天我工作很忙”。