2.1 簡介

數學中有很多不同的領域，而集合論是一個基礎部分。 它包含了很多其他數學範疇中的基本概念，而且是常用於表達數學理念的一種語言。 在日常生活中，當我們說「某一學校的學生組成一個代表團隊參加全港校際比賽」時，這些概念與數學中 **集合 (Set)** 的觀念息息相關。

- **集合 和 元素 (Set & Element) 的關係**

集合和元素是集合論中的原始概念。

「集合」(set) 就是指由一堆事物 (objects) 所組成的一個抽象個體。
「元素」(element) 就是指於集合內的事物。

如果 a 是集合 A 中的元素，則會以 $a \in A$ 代表，即 a 在集合 A 中 (a belongs to A)或 集合 A 包含 a (A contains a)。 $a \notin A$ 即表示 a 不是 A 的元素。

例一： 集合：英文字母 A, B, C, D, ⋯, W, X, Y, Z .
元素：$a, b, c, d, e, f, \cdots, w, x, y, z.$

例二： **N** = 自然數集； **Z =** 整數集； **Q** = 有理數集； **R =** 實數集。

例三： A = {1, 2, 3} 表示 A 是三個元素的集合，它的元素是 1, 2, 3 (即 $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$)。 又如 B = {a, b, c, d}，表示 B 是四個元素 a, b, c, d 的集合。

在上述記号中，{ } 括號內寫出的元素應當互不相同，元素也不必順序出現，如 { 1, 2, 3 }， { 1, 3, 2 }， { 2, 1, 3 }， { 2, 3, 1 }， { 3, 1, 2 }， { 3, 2, 1 }
都是同一個集合。

- **集合的四種表示方法**

1. 列舉法： 即將集合中的元素一一列出。
2. 特性刻劃法： 即用元素的性質刻劃集合。
3. 圖示法： 即用文氏圖 (Venn Diagrams) 表示集合及集合間的關係。
4. 運算法： 即用巳知集合的運算構造新的集合。

關於上述「特性刻劃法」有以下較詳細說明：

對於元素較多的集合， 常常採用下面的記號。 例如： $A = \{ a \mid a$ 爲正奇數 $\}$。

在上述記法中， 直線符號 | 前寫一個代表元素，符號後面寫明它所具有的性質。

在一般情況下，對任何集合 A 及條件 $p(x)$ 都存在集合 B， 使得對任何 x，

$x \in B \Leftrightarrow x \in A$ 及 $p(x)$， 即 $B = \{ x \in A \mid p(x) \}$。

- **集合間的比較 (相等關係)**

兩個集合 A 及 B 相等 (即 A = B) 當且僅當 對任何 x， 有 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$。

<u>例子</u>：試判斷以下兩個集是否相同。

(i) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ 和 $B = \{ 4, 2, 1, 3 \}$。

(ii) $A = \{ 3, 2, 1, 4 \}$ 和 $B = \{ 1, 2, 4, 3, 4, 3 \}$。

(iii) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ 和 $B = \{ 2, 3, 2, 1, 3, 1 \}$。

練習

1. 陳强喜歡吃蘋果、梨子、桃子、香蕉， 用集合表示他喜歡吃的水果。

2. 用列舉法表示下列各集合的元素：

(a) $A = \{x \mid x^2 < 90,\ x$ 爲正奇數$\}$

(b) $B = \{$ 小於等於 18 的素數 $\}$

(c) $C = \{ n \in \mathbf{N} \mid n^2 - 1 = 15$ 並且 $n^3 = 80 \}$ ($\mathbf{N}$ 代表自然數集)

3. 下列集合中哪些是相等的？

(a) 單詞〝spear〞中包含的字母所構成的集合。

(b) 單詞〝spears〞中包含的字母所構成的集合。

(c) 單詞〝pears〞中包含的字母所構成的集合。

(d) 單詞〝spares〞中包含的字母所構成的集合。

2.2 特殊的集合

- **單元集 (Singleton)**

  一個只包含一個元素的集合稱爲 單元集。

  例子： $A = \{ 1 \}$、 $B = \{ \{ 1, 2, 3, 4 \} \}$ 都是單元集。

- **空集 (Empty Set)**

  沒有元素的集合稱爲 空集，通常以符號 $\varnothing$ 來標記。

- **全集 (Universal Set)**

  包含所有被考慮範圍中元素的集合，通常以符號 E 來標記。

- **冪集 (Power Set)**

  集合 A 的所有子集作爲元素構成的集合，通常以符號 $\wp(A)$ 來標記。

練習

1. 下列集合中哪些是空集？

   (a) 74 與 78 之間的素數構成的集合。

   (b) 按英文字母表的順序， z 以後的字母所組成的集合。

2. 求下列集合的冪集：

   (a) $A = \{ 2, 4, 6 \}$

   (b) $B = \{ \varnothing, 1, \{ 1 \}\}$

2.3 包含 (集合的子集)

● **子集 (Subset)**

集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，則稱 A 是 B 的子集， 記以 $A \subseteq B$。

對任何集合 A 及 B，$A \subseteq B$ 當且僅當 對任何 x， 有 $x \in A \Rightarrow x \in B$。

空集 $\varnothing$ 是每一個集合的子集。 即對任何集合 A, 都有 $\varnothing \subseteq A$。

另外，當 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$ 時，$A \subseteq C$， 即 $\subseteq$ 關係具有傳遞性。

<u>例子</u>：試判斷下列各題中, 集合 A 是否集合 B 的子集。 即 $A \subseteq B$ ？

1. $A = \{ 1 , 3 \}$， $B = \{ 1 , 2 , 3 \}$。
2. $A = \{ 1 , 3 , 4 , 5 \}$， $B = \{ 1 , 3 , 5 \}$。
3. $A = \{ 1 , 2 , 5 , 7 , 8 , 12 \}$， $B = \{ 1 , 2 , 5 , 6 , 7 , 8 , 13 \}$。
4. $A = \varnothing$， $B = \{ 2 , 5 , 7 , 9 \}$。
5. $A = \{ 1 \}$， $B = \varnothing$。
6. $A = \{ 1, 2, 3 \}$， $B = \{ 3, 2, 1 \}$。

● **真子集 (Proper Subset)**

當 $A \subseteq B$，而且 $A \neq B$ 時，我們稱 A 為 B 的真子集，並以 $A \subset B$ 表示。

<u>例一</u>：$A = \{ 1, 3 \}$，$B = \{ 1, 2, 3 \}$。 <u>例二</u>： $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$。

例二即表示自然數集是整數集的真子集，整數集是有理數集的真子集，
有理數集是實數集的真子集。

● 三種不同的子集

1. 子集：$A \subseteq B$ 2. 真子集：$A \subset B$ 3. 集合相等： $A = B$

因此，集合間的比較關係有： $A = B$， $A \neq B$， $A \subset B$， $A \supset B$， $A \subseteq B$， $A \supseteq B$。

[也有些書上用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集， 而用 $A \subsetneq B$ 表示 A 是 B 的真子集。]

命題： 對任何集合 A 及 B， $A = B$ 當且僅當 $A \subseteq B$ 並且 $B \subseteq A$。

$(\Rightarrow)$ (i) $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$

(ii) $\forall x,\ x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subseteq A$

$(\Leftarrow)$ (i) $A \subseteq B \Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

(ii) $B \subseteq A \Rightarrow \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$

$\therefore A = B$

練習

1. 集合 $\{ 1 \}$ 的所有子集是下列哪一個？

   (i) $\varnothing$；　(ii) $\{ \varnothing \}$；　(iii) $\varnothing, \{ 1 \}$；　(iv) $\{ \varnothing, \{ 1 \}\}$。

2. 下列陳述中哪些爲真？哪些爲假？

   (i) $\{$ 陳強 $\} \supseteq \{$ 陳強, 陳小強 $\}$；　(ii) $\{$ 陳強, 陳小強 $\} \subset \{$ 陳強 $\}$；

   (iii) $\{$ 陳強 $\} \not\subset \{$ 陳強 $\}$；　(iv) $\varnothing \subseteq \{$ 陳小強 $\}$。

3. 對於任意集合 X、Y、Z， 判斷下列各題的正確性：

   (i) 若 $X \in Y$，$Y \subseteq Z$， 則 $X \in Z$。

   (ii) 若 $X \in Y$，$Y \subseteq Z$， 則 $X \subseteq Z$。

   (iii) 若 $X \subseteq Y$，$Y \in Z$， 則 $X \in Z$。

   (iv) 若 $X \subseteq Y$，$Y \in Z$， 則 $X \subseteq Z$。

4. 證明對任何集合 A、B 及 C，若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq C$，則 $A \subseteq C$。

5. 判定下列各式是否成立：

   (i) $\{ a \} \in \{\{ a \}\}$；　(ii) $\{ a \} \subseteq \{\{ a \}\}$；

   (iii) $\{ a \} \in \{ a, \{ a \}\}$；　(iv) $\{ a \} \subseteq \{ a, \{ a \}\}$。

6. 試列出集合 $\{ 1, \{ 1 \}, \varnothing, \{ 2, \{ 1 \}\}\}$ 的所有元素。

7. 下列各式中不正確的是哪一個？

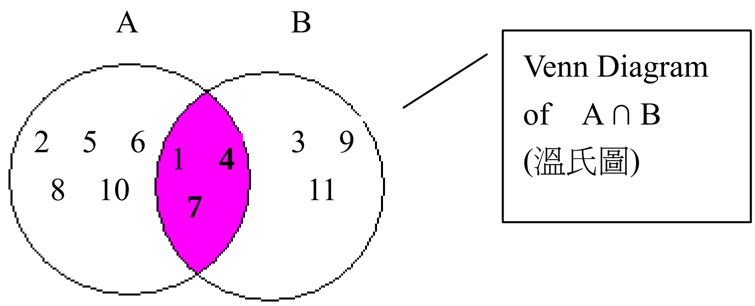
   (i) $\varnothing \in \varnothing$；　(ii) $\varnothing \subseteq \varnothing$；　(iii) $\varnothing \subseteq \{ \varnothing \}$；　(iv) $\varnothing \in \{ \varnothing \}$。

2.4 集合的運算

- **交集 (Intersection)**

  若集合 A 及 B 共有的元素組成集合 $A \cap B = \{ x \in A \mid x \in B \}$， 該集合稱為 A 及 B 的交集。

  <u>例一</u>： $A = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10 \}$ 和 $B = \{ 1, 3, 4, 7, 9, 11 \}$， 則 $A \cap B = \{ 1, 4, 7 \}$。



  <u>例二</u>： 若 A 是貓的集合， B 是白貓的集合， 則 $A \cap B = B$。 一般地，若 $A \supseteq B$， 則 $A \cap B = B$， 反之亦真。

  <u>例三</u>： 若 A 是正實數的集合， B 是負實數的集合， 則 $A \cap B = \varnothing$。

  <u>例四</u>： 試找出下列各題中的交集。

1. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$，$B = \{ 2, 5, 6, 8, 9, 11 \}$，$C = \{ 3, 6, 7, 9, 12, 14, 16 \}$。
   (a) $A \cap B =$
   (b) $A \cap C =$
   (c) $B \cap C =$
   (d) $A \cap B \cap C =$

2. $A = \varnothing$ ， $B = \{ 2, 3, 7, 9, 12, 13, 16, 20 \}$， $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$。
   (a) $A \cap B =$
   (b) $A \cap C =$
   (c) $B \cap C =$
   (d) $A \cap B \cap C =$

交集的常用定律

1. 對任何集合 A 及 B， $A \cap B \subseteq A$ 並且 $A \cap B \subseteq B$。

證明： $\forall x,\ x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ and $x \in B$
$\Rightarrow x \in A$
$\therefore A \cap B \subseteq A$。 Similarly, $A \cap B \subseteq B$。

2. 對任何集合 A 及 B， $A \cap B = B \cap A$。 [交換律]

證明： $\forall x,\ x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ and $x \in B$
$\Leftrightarrow x \in B$ and $x \in A$
$\Leftrightarrow x \in B \cap A$
$\therefore A \cap B = B \cap A$。

3. 對任何集合 A， $A \cap \varnothing = \varnothing$。

證明： (i) $\forall x,\ x \in A \cap \varnothing \Rightarrow x \in A$ and $x \in \varnothing$
$\Rightarrow x \in \varnothing$
$\therefore A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$

(ii) $\varnothing$ 是任何集合的子集
$\therefore \varnothing \subseteq A \cap \varnothing$

4. 對任何集合 A、B 及 C， 若 $C \subseteq A$ 及 $C \subseteq B$， 則 $C \subseteq A \cap B$。

證明： $\forall x,\ x \in C \Rightarrow x \in A$ and $x \in B$
$\Rightarrow x \in A \cap B$
$\therefore C \subseteq A \cap B$。

5. 對任何集合 A 及 B， $A \cap B = A$ 當且僅當 $A \subseteq B$。

證明： (i) $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$
$\Rightarrow x \in A$ and $x \in B$
$\Rightarrow x \in B$
$\therefore A \subseteq B$
(ii) $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in A$ and $x \in B$
$\Rightarrow x \in A \cap B$
$\therefore A \subseteq A \cap B$
$\therefore A \cap B = A$ ($A \cap B \subseteq A$ is always true)
$\therefore A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$。

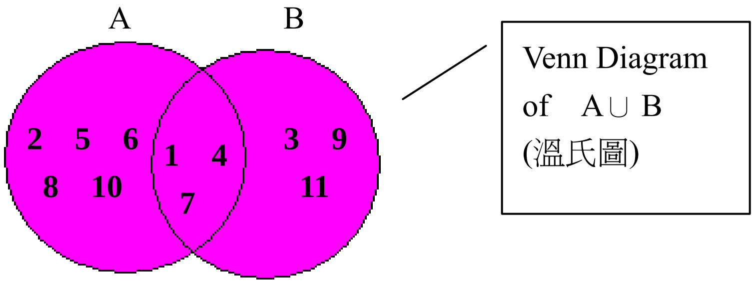
6. 對任何集合 A、B 及 C， $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。 [結合律]

證明： $\forall x,\ x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ and $x \in B \cap C$
$\Leftrightarrow x \in A$ and $x \in B$ and $x \in C$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ and $x \in C$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$
$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。

- **併集 (Union)**

對任何集合 A 及 B， 存在集合 $A \cup B$ 使得任何 x， $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ 或 $x \in B$。集合 $A \cup B$ 稱爲 A 及 B 的併集。

例一： $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ 和 $B = \{1, 3, 4, 7, 9, 11\}$。 則有
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$。



例二： 若 A 是貓的集合， B 是黑貓的集合， 則 $A \cup B = A$ (因爲黑貓是貓)。 一般地，若 $A \supseteq B$， 則 $A \cup B = A$， 反之亦真。

例三： 若 A 是正實數的集合， B 是負實數的集合， 則 $A \cup B$ 是非零實數的集合。

例四： 試找出下列各題中的併集。

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$， $B = \{2, 5, 6, 8, 9, 11\}$， $C = \{3, 6, 7, 9, 12, 14, 16\}$。

   (a) $A \cup B =$

   (b) $A \cup C =$

   (c) $B \cup C =$

   (d) $A \cup B \cup C =$

2. $A = \varnothing$， $B = \{2, 3, 7, 9, 12, 13, 16, 20\}$， $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

   (a) $A \cup B =$

   (b) $A \cup C =$

   (c) $B \cup C =$

   (d) $A \cup B \cup C =$

併集的常用定律

1. 對任何集合 A 及 B， $A \cup B = B \cup A$。 [交換律]

2. 對任何集合 A 及 B， $A \subseteq A \cup B$ 並且 $B \subseteq A \cup B$。

3. 對任何集合 A， $A \cup \varnothing = A \cup A = A$。

4. 對任何集合 A 及 B， $A \cup B = A$ 當且僅當 $B \subseteq A$。

5. 對任何集合 A、B 及 C， 若 $A \subseteq C$ 及 $B \subseteq C$， 則 $A \cup B \subseteq C$。

6. 對任何集合 A、B 及 C， $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$。 [結合律]

7. 對任何集合 A、B 及 C， $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 並且

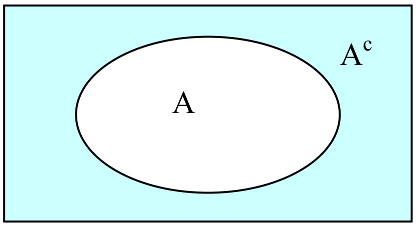
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。 [分配律]

- **補集 (Complement)**

  E 是全集。 對任何集合 A，元素在 E 中而不在 A 中的集合可以表示爲

$$A^c = \{ x \in E \mid x \notin A \}，$$

  即 A 的補集 (the complement of A)。



<u>例子</u>：設 $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ 爲全集 和 $A = \{ 1, 2, 4, 7 \}$。 則 $A^c = \{ 3, 5, 6 \}$。

顯然，

$$A \cap A^c = \varnothing， \quad A \cup A^c = E。$$

A^c 由不屬於 A 的元素組成， 因此

$$(A^c)^c = A，$$

即補集的補集是原集合， 所以 A 與 A^c 互爲補集。 另外， $E^c = \varnothing$， $\varnothing^c = E$。

$\boxed{\text{練習}}$

1. 設 $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$、 $A = \{ 1, 4 \}$、 $B = \{ 1, 2, 5 \}$、 $C = \{ 2, 4 \}$， 其中 E 爲全集，試求出下列集合。

   (a) $A \cap B^c$

   (b) $A^c \cup B^c$

   (c) $(A \cap B) \cup C^c$

   (d) $(A \cap B)^c$

   (e) $A \cup B^c \cup C$

2. 設全集 E = { 全班男女學生 }，有子集 A = { 男學生 }、B = { 身高 5 呎 5 吋以上的學生 }，試求下列集合運算的結果。

   (a) $A \cap B$

   (b) $A^c \cap B$

   (c) $A \cup B$

   (d) $A^c \cup B$