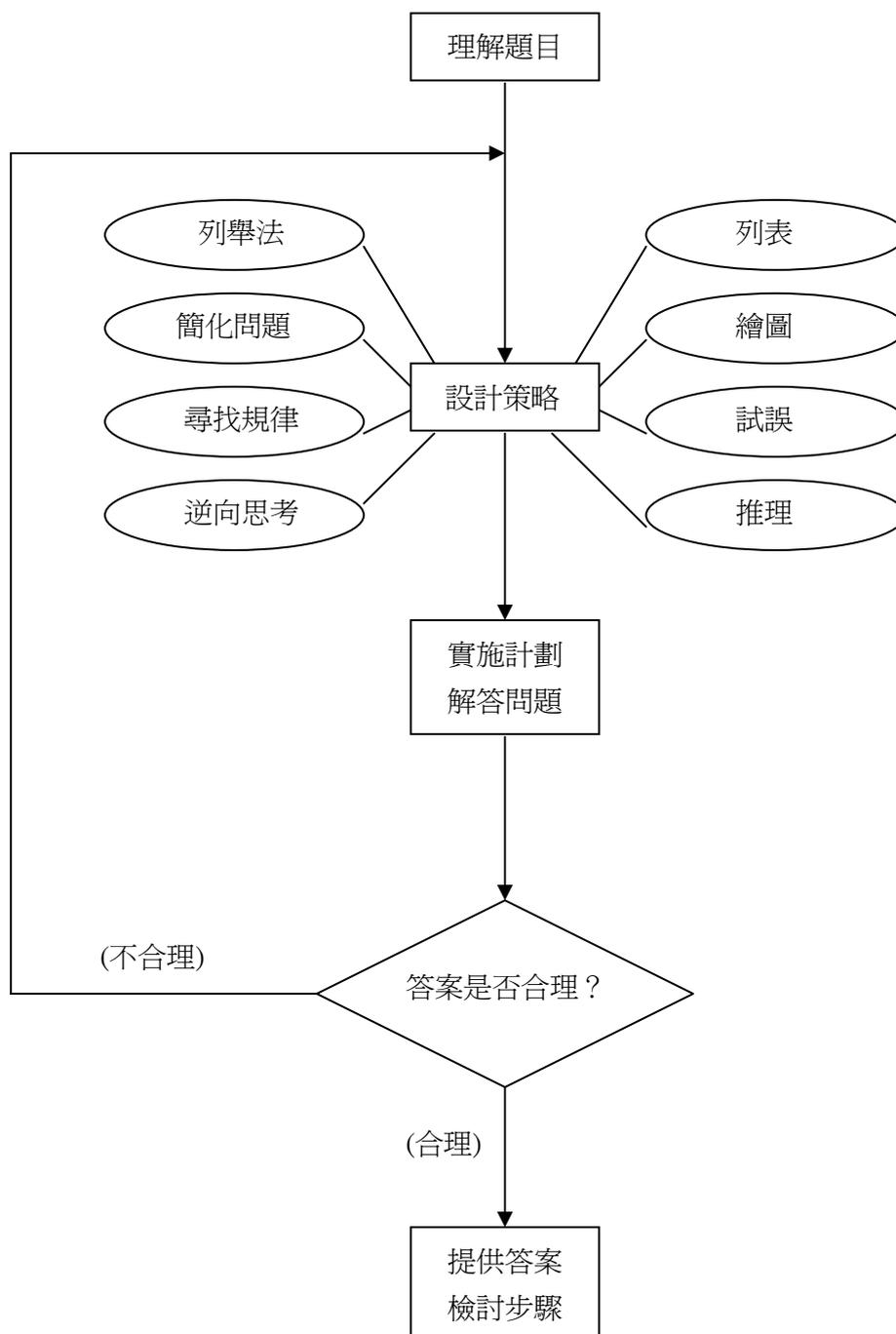


下圖是波利亞（Polya）的四個解難步驟流程圖及一些常見的解難策略。從這個流程圖中所見，如果學生回顧解答時發現答案不合理，便須重新設計策略。



面對數學難題，如果學生能夠勇於嘗試，樂於思考，恰當運用各種解難策略，難題一般都能迎刃而解的。

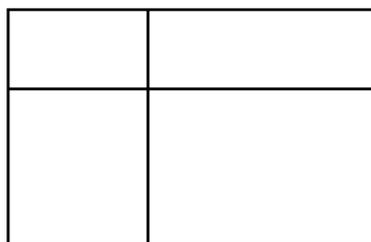
誠然，從理解題目到構思一個解題策略也許是漫長而曲折的過程。事實上，解答一個題目的主要成就在於構思一個解題策略的**思路**。這個思路可能是逐漸形成的。很多時候，在經過一段時間不斷的試驗之後，會剎那間閃現出一個好主意，解決難題往往就從這個突破點出發。

以下我們會討論一般小學生常用的解題策略，每一部分都有一些例子作輔助說明。

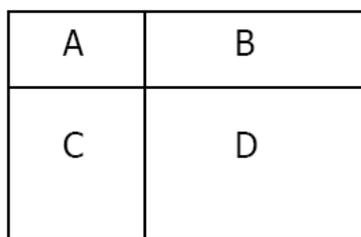
### 3.1 列舉法 (窮盡可能性)

列舉法適用於數出符合某種幾何特性或數學關係的事物。為方便進行，老師可以指導學生為圖的端點或個別部分加上標記 ( label )，並有系統地考慮各種可能性。當所有可能的組合都被列出，此方法又可稱為窮盡法。

例一： 下圖共有多少個矩形？



**答案：** 先將個別區域加上標記。



估一個區域的矩形：

估兩個區域的矩形：

估三個區域的矩形：

估四個區域的矩形：

估五個或以上區域的矩形：

列舉完畢，故此，圖中共有\_\_\_\_個矩形。

**例二：** 【書包顏色】 小黃、小白和小藍在走廊相遇，小白說：「真有趣，我們 3 個書包的顏色和姓氏都不相配，要是交換一下便全一致了。」 她們的書包分別是什麼顏色呢？

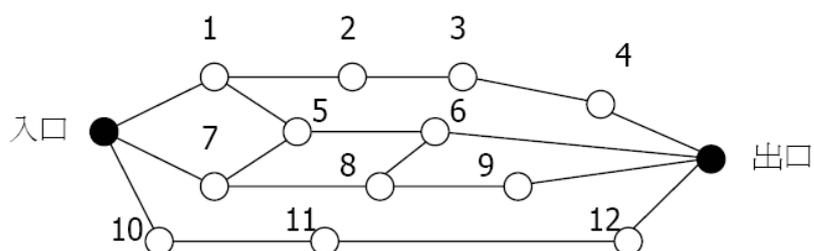
**答案：** 先有規律地列出各種可能性，



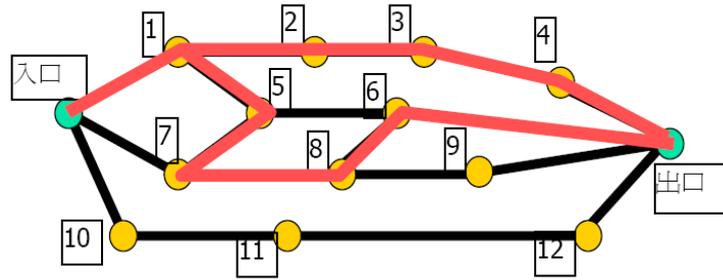
然後，再依題目選出合適的可能性。由於 3 個書包的顏色和姓氏都不相配，所以



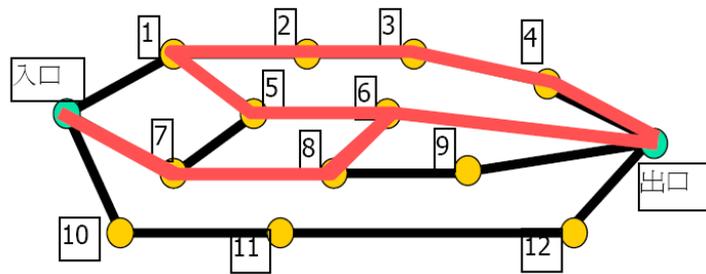
**例三：** 【參觀展覽館】 展覽館內，「○」表示展品，「—」表示通道。不會重覆觀看展品的小珍從入口到出口，可有多少種不同的走法？



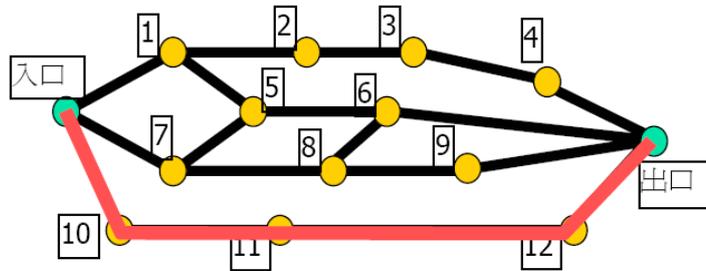
答案： 先看清楚题目的要求，不會重覆觀看展品，即每次參觀路線的編號不會重覆。  
然後有規律地列出所有參觀路線：



路線： 1→2→3→4； 1→5→6； 1→5→6→8→9；  
1→5→7→8→9； 1→5→7→8→6



路線： 7→5→1→2→3→4； 7→5→6； 7→5→6→8→9； 7→8→9；  
7→8→6； 7→8→6→5→1→2→3→4



路線： 10→11→12

總結所有可能路線：

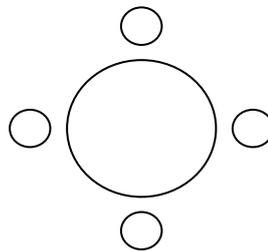
1. 入口 → 1 → 2 → 3 → 4 → 出口
2. 入口 → 1 → 5 → 6 → 出口
3. 入口 → 1 → 5 → 6 → 8 → 9 → 出口
4. 入口 → 1 → 5 → 7 → 8 → 9 → 出口
5. 入口 → 1 → 5 → 7 → 8 → 6 → 出口
6. 入口 → 7 → 5 → 1 → 2 → 3 → 4 → 出口
7. 入口 → 7 → 5 → 6 → 出口

8. 入口  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  5  $\rightarrow$  6  $\rightarrow$  8  $\rightarrow$  9  $\rightarrow$  出口
9. 入口  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  8  $\rightarrow$  9  $\rightarrow$  出口
10. 入口  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  8  $\rightarrow$  6  $\rightarrow$  出口
11. 入口  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  8  $\rightarrow$  6  $\rightarrow$  5  $\rightarrow$  1  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  4  $\rightarrow$  出口
12. 入口  $\rightarrow$  10  $\rightarrow$  11  $\rightarrow$  12  $\rightarrow$  出口

例四： 【擲骰子】 哥哥和弟弟玩擲骰子遊戲，猜三顆骰子擲出數目之和。 哥哥說：開 10 點的機會較大， 弟弟卻說不是：應該是開 9 點的機會較大。 問誰的說法正確？

**答案：** 可以列出所有可能性：

例五： 【圓桌吃飯】 張先生夫婦及兩個兒子共四人圍着圓桌吃飯（如下圖所示）。現在要安排這四人就座，問共有多少種不同的方法？



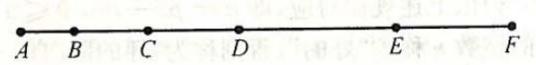
**答案：** 嘗試列出所有可能坐法：

**練習**

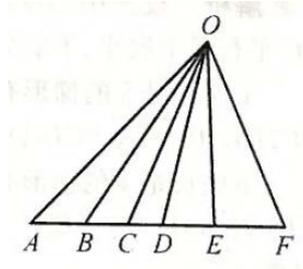
1. 列出 24 和 32 的公因數。
2. 列出 6 和 8 的首三個公倍數。
3. **【四色問題】** 有一圖畫（見下圖），只用紅、白、黃、藍四色，一共有多少種塗抹方法使邊界清晰？

4. 【幾何計數】

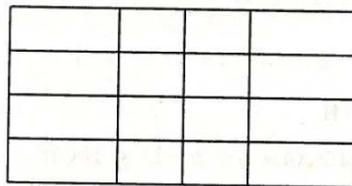
- 如圖所示，數一數圖中有多少條不同的線段？



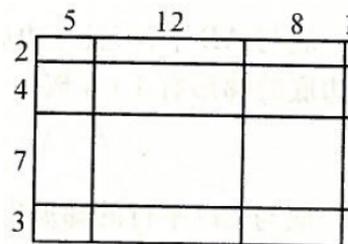
- 圖中有多少個三角形？



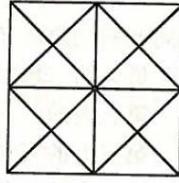
- 圖中一共有多少個長方形？



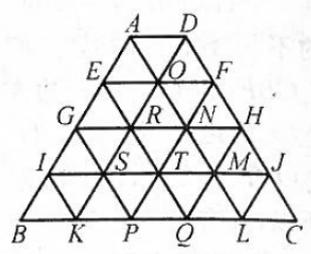
- 圖中所有長方形的面積和是多少？



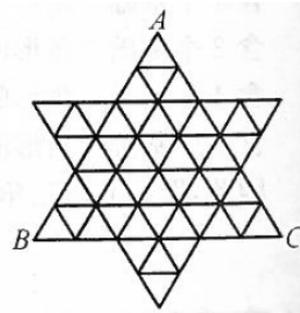
- 圖中有多少個三角形？



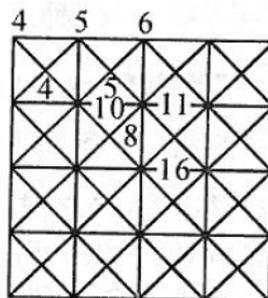
- 圖中有多少個梯形？



- 圖中共有多少個三角形？



- 圖中共有多少個等腰直角三角形？



## 3.2 列表

列表法是把問題的相關資料有系統地以表的形式顯示出來。此法除了可以單獨用來解決問題之外，也可以與其他解難策略如試誤、尋找規律、窮盡法等綜合運用。老師可以提醒學生在列表前，要先考慮列和欄所代表的東西，然後才有系統地完成該表。

例一： 【硬幣組合】 用 2 元、5 元和 10 元硬幣湊合 20 元，共有多少個組合？

答案： 先有規律地列出各種可能性，

組合	\$10	\$5	\$2
1	2個	0個	0個
2	1個	2個	0個
3	1個	0個	5個
4	0個	4個	0個
5	0個	2個	5個
6	0個	0個	10個

所以共有\_\_\_\_個組合。

例二： 【風紀當值】 教員室每日需要一位風紀當值，老師正為小芳、小珍、小文、小玉和小強安排當值日子。小芳星期一、三、五都要到合唱團練歌；小珍只可在星期三、四當值；小文希望在星期一或二當值；小玉則選星期四或五；而小強卻說星期三和五都沒有問題。最後老師編排他們在哪日當值呢？

答案： 用表列方式寫出相關的項目：

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
小芳					
小珍					
小文					
小玉					
小強					

然後，再依題目，加上適當的符號：

1. 小芳星期一、三、五都要到合唱團練歌。
2. 小珍只可在星期三、四當值。
3. 小文希望在星期一或二當值。
4. 小玉則選星期四或五。
5. 小強卻說星期三和五都沒有問題。

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
小芳	X	V	X	V	X
小珍			V	V	
小文	V	V			
小玉				V	V
小強			V		V

接著，逐日考慮各人的當值時間：

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
小芳	X	V	X	V	X
小珍			V	V	
小文	V	V			
小玉				V	V
小強			V		V

星期一只可以由小文負責，所以星期二便要由小芳負責。

若星期三由小珍負責，星期四便由小玉負責，而星期五則是小強。

此外，若星期四由小珍負責，星期五便由小玉負責，而星期三則是小強。

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
小芳	X	V	X	V	X
小珍			V	V	
小文	V	V			
小玉				V	V
小強			V		V

故此，星期一和星期二只有一種安排，但星期三至五卻可以有兩種安排。

例三： 【頒獎嘉賓】 頒獎禮共分三節舉行，由副校長、校長和校監頒獎。 第三節頒獎時，副校長要安排閉幕禮的事宜；校長於第二節頒獎時要接待嘉賓，不能頒獎；校監於第二節頒獎前才到達會場。 老師該怎樣安排頒獎嘉賓名單？

答案： 用表列方式寫出相關的項目：

	副校長	校長	校監
一			
二			
三			

再依題目指示，加上適當符號。由於第三節頒獎時，副校長要安排閉幕禮的事宜，而校長於第二節頒獎時要接待嘉賓，校監則於第二節頒獎前才到達會場。故此在下列時間不能頒獎。

	副校長	校長	校監
一			X
二		X	
三	X		

然後再依條件，作合適的安排。若副校長在第一節頒獎，校長便要在第三節頒獎，而校監則在第二節。

	副校長	校長	校監
一	V		X
二		X	V
三	X	V	

若副校長在第二節頒獎，校長便要在第一節頒獎，而校監則在第三節。

	副校長	校長	校監
一		V	X
二	V	X	
三	X		V

**練習**

1. 寶欣和三個同學到商場拍貼紙相，由於地方細小，每次拍照只可容納兩人。如果各人都與其他同學合照一次，共需拍照多少次？

2. 有劉、馬、張三戶人家，每家各有一個孩子，他們的名字是小芳(女)，小儀(女)，小龍(子)。三家的媽媽是趙媽、李媽、方媽。

(1) 老劉和李媽各自的孩子都參加了少年女子游泳隊；

(2) 老馬的女兒不是小儀；

(3) 老張和方媽不是一家人。

請問哪三個人是一家？

3. 【公平分梨子】A, B, C 三人分梨子時，若按下面的方法辦則從概率的角度講是公平的。將梨子總數用 3 除，除得盡時每人分相同數量，餘 1 個時僅多給 A 一個，餘 2 個時 B 和 C 每人多分一個。用與此類似的方法，試考慮將梨子分給兩個人，四個人的情況。

### 3.3 繪圖

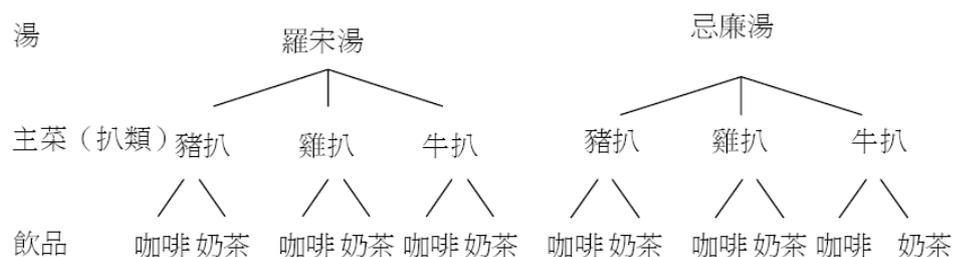
繪圖的方法有很多種，包括樹狀圖和概念圖，老師應指導學生視乎問題內容而選用不同方法。如果問題涉及幾個組別且各有若干的物件，並要求找出各物件跨組配搭的方法，使用樹狀圖便能夠清晰列出所有組合。

**例一：** 【套餐選擇】 某餐廳聲稱能夠提供 12 款套餐讓顧客選擇，其餐單如下：

- 湯： 羅宋湯或忌廉湯
- 主菜： 豬扒、雞扒或牛扒
- 飲品： 咖啡或奶茶

究竟這餐廳說的是否屬實？ 有沒有誤導消費者？

**答案：** 要回答上述問題，可以用樹狀圖有系統地將資料表述：



上圖的直線分叉成樹枝一樣，因而此類圖形又稱為樹狀圖（tree diagram）。

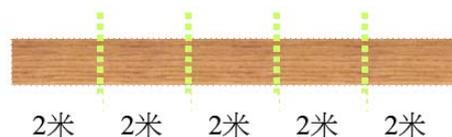
上層代表湯類的兩個可能選擇：羅宋湯或忌廉湯。每一種湯都連結中層（主菜）的三種可能扒類：豬扒、雞扒或牛扒。選定某一種主菜後，又可連結下層飲品的兩款可能選擇：咖啡或奶茶。

從上層開始，沿著樹枝往下走，便能列出所有 12 款套餐：

羅宋湯、豬扒及咖啡	羅宋湯、雞扒及咖啡	羅宋湯、牛扒及咖啡
羅宋湯、豬扒及奶茶	羅宋湯、雞扒及奶茶	羅宋湯、牛扒及奶茶
忌廉湯、豬扒及咖啡	忌廉湯、雞扒及咖啡	忌廉湯、牛扒及咖啡
忌廉湯、豬扒及奶茶	忌廉湯、雞扒及奶茶	忌廉湯、牛扒及奶茶

**例二：** 【鋸木需時】 現在要把一根長 10 米的木料鋸成 2 米一段的短木料。 鋸一段需用 4 分鐘， 把所有木料全部鋸完共需要多少分鐘？

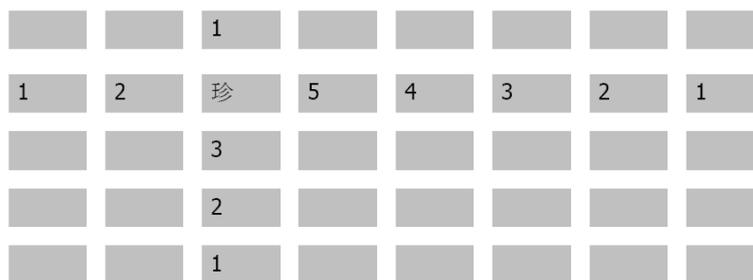
**答案：** 將木料鋸成 5 段，情況如下：



所以，鋸成 5 段，只需鋸 4 次，即 16 分鐘便可。

**例三：** 【全班人數】 小珍在課室的坐位是由左邊數起第 3 排，右邊數起第 6 排；從前面往後數，小珍是第 2 人，從後面往前數是第 4 人。 已知每行的人數相同， 小珍同班共有多少人？

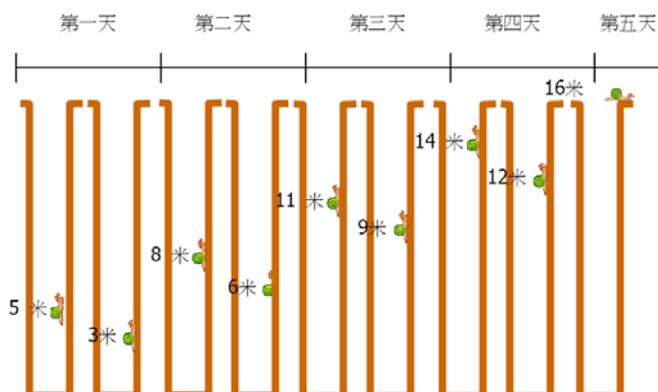
**答案：** 已知每行的人數相同



所以， 小珍同班共有 8 人。

**例四：** 【小蝸牛爬井】 小蝸牛在乾涸的井底往上爬， 牠白天爬上 5 米，晚上溜下 2 米。 如果井口到井底深 16 米，小蝸牛要多少天才能爬到井口？

**答案：** 到了第五日白天（如圖所示），小蝸牛爬到井口了！



練習

1. 5 隻貓在 5 分鐘可以捉 5 隻老鼠，按此比例，為了要在 100 分鐘內捉 100 隻老鼠，需要多少隻貓？
2. 小欣借了 100 元給小雄，小美則向小欣借了 50 元，小雄又向小美借了 50 元。最後，誰還款給誰，才會互不相欠？
3. 請解釋為甚麼每個人一生中總有某個時刻，您的體重（磅為單位）數字上相等於您的身高（吋為單位）。
4. 每小時都有一班火車從甲地駛往乙地，同時也有一班火車從乙地駛往甲地。全程都是 7 個小時。有一名乘客從早上八點乘坐從甲地開出的火車，他在途中能遇到幾班從乙地開往甲地的火車？

### 3.4 試誤

還記得學生學習除法時怎樣求「商」嗎？他們開始時也是用試誤方法找出商數來的，所以我們稱這種求商的過程為「試商」。面對一道不熟悉的題目，如果未能即時想出解題方法，用試誤法作開始往往會帶來新的啟示，甚至可以找到答案。

沒有經驗的學生試誤時往往用「滿足部份條件的可能答案」或隨機選取一些數字作開始；有經驗及數字感較好的學生會先作合理估算，並以估值作開始。因為初次試誤的數值往往未能滿足問題的所有條件，所以老師宜協助學生分析情況以便調節試值。討論時，老師可以鼓勵學生說出他們的想法，這有助學生強化試誤背後的兩項重要因素：數字感和推理能力。

例一： 試在下列空格內填上加號、減號、乘號或除號，並在適當的位置加上括號，使以下等式成立。

$$9 \square 5 \square 3 \square 2 = 24$$

**答案：**

上述的例題看似很難入手，但只要學生有良好的解難習慣，以不同的運算符號組合試誤，總會找到一個合理的答案。通過試誤，學生既可以慢慢掌握解決這類問題的竅門。

例二： 試用 5 個 8 寫成一道答案是 9 的算式。（算式中只可包括加法和減法。）

**答案：**

在試誤的過程中，如果學生能夠聯想一些相關的問題，將有助解決問題。這些相關的問題包括：

例三： 【巧填數字】 把 1 到 8 這八個數字填在空格內，使以下出現的各條算式都能夠成立。

答案：

	-		=	
÷				+
=				=
	×		=	

先嘗試填入數字：

8	-	7	=	1
÷				+
4				5
=				=
2	×	3	=	6

然後，嘗試其他填法，

8	-	7	=	1
÷				+
4				5
=				=
2	×	3	=	6

6	-	5	=	1
÷				+
3				7
=				=
2	×	4	=	8

嘗試秘訣：

是否每個數字均可填在  $\square + \square$  的算式中？

是否每個數字均可填在  $\square - \square$  的算式中？

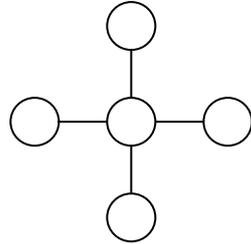
是否每個數字均可填在  $\square \times \square$  的算式中？

是否每個數字均可填在  $\square \div \square$  的算式中？

那麼，先嘗試那條算式較好？ 為什麼？

**練習**

1. 【填數字】 把 1, 3, 5, 7, 9 分別填入下面的圓圈內，使直行和橫行上的三個數字之和相等。



2. 1 至 9 九個數字分三組，兩個一組，三個一組，四個一組。頭兩組數字相乘等如第三組數字。例如： $12 \times 483 = 5796$ 。還有其他可能嗎？
3. 到某餅店買兩款西餅：果撻和芝士蛋糕。最後買了若干數目的果撻和芝士蛋糕。果撻和芝士蛋糕的價錢分別是每件 \$14 和 \$14.5。總計的價錢剛好是 \$300。問分別各買了多少件？

### 3.5 簡化問題

事實上，難題往往不容易一試即能解決的。解題者必須細閱問題，從多角度、多層次思考解題方法。運用「簡化問題」策略往往能夠令解題者對問題的解決方法產生初步理解。

題目如：「10 隊足球隊進行單循環比賽共需多少場次？」，老師可以指導學生先考慮只有 2 隊的情況，繼而 3 隊、4 隊……，對簡單化的問題有了認識，再向更多複雜條件的問題進行探究，往往能夠順利過渡，把原來高難度的問題解答。

某些難題可以分拆成若干部分來考慮，例如：「1，4，5，6，8 五個數字可以組成哪一個最大的四位單數？」這問題由三項要求組成：「四位數」、「最大」和「單數」。現在把問題分拆成兩部分，先組成最大的四位數 8654，再考慮單數的條件，便得答案為 8651。

例一：報章報導，「72 架飛機共可乘載 \*317\* 人。」由於印刷出現問題，萬位和個位數字不見了，你知道平均每架飛機可載多少人？

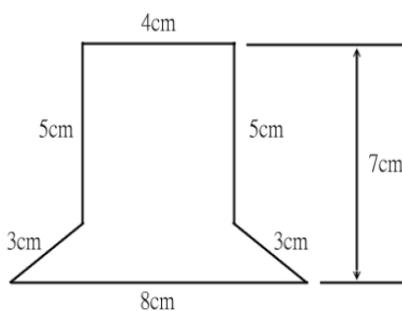
**答案：**這個問題可以有很多解決方法。如果解題者對整除性有認識，知道可以被 72 整除的數，必定可以被 8 和 9 整除，因此這問題可以分拆成兩個部分。首先，該數可以被 8 整除即表示它最後三個位 17\* 能夠被 8 整除，因而得出個位是 6。

接著運用可以被 9 整除的特性，以 A 表示萬位數字，各位值數字之和 (A + 3 + 1 + 7 + 6) 是 9 的倍數，因而得出 A 是 1。

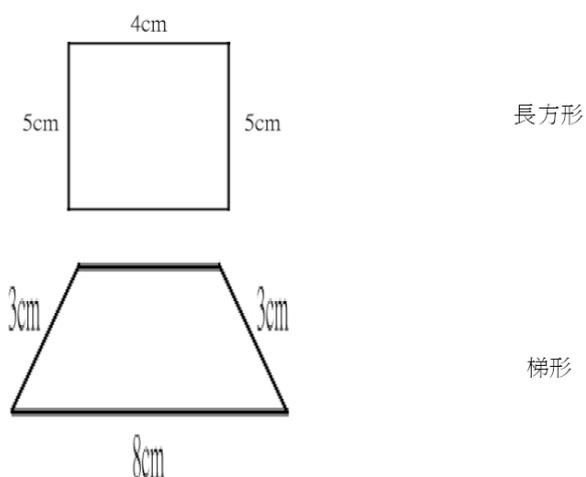
計算了遺失的數字，知道總人數是 13176，因此，平均每架飛機可載：

$$\frac{13176}{72} = 183 \text{ (人)}。$$

例二： 【花瓶圖形】 求下面花瓶圖形的面積。



答案： 這個花瓶圖形可以分割成兩個較小的簡單圖形：長方形和梯形。



梯形的上底和高並沒有直接給出，但可以從已知資料求得。

$$\text{梯形的上底} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{梯形的高} = 7 - 5 = 2 \text{ (cm)}$$

$$\text{長方形面積} = 5 \times 4 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{梯形面積} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore \text{花瓶圖形面積} = \underline{\hspace{2cm}}$$

遇上比較複雜的圖形，可以嘗試將它分割成若干個簡單的部分，往往能夠通過不斷的嘗試找出解題方法。

例三： 求  $7^{50}$  的個位數。

**答案：** 理論上這個問題雖然可以用直接計算來求解，但可以想像將 7 自乘 50 次得出來的積將會很大，一般計算機根本不能顯示其個位數。再者，慢慢乘下去不僅費時，計算愈繁複，出錯機會亦愈大。  
如果用「簡化問題」策略，解題者可以先用簡單的次方開始，細心觀察和思考，或能找到解題的方法：

$$\begin{aligned}7^1 &= 7 \\7^2 &= 49 \\7^3 &= 343 \\7^4 &= 2401 \\7^5 &= 16807 \\7^6 &= 117649\end{aligned}$$

這裡共試了首六個的次方，觀察到積的個位數字分別是 7、9、3、1、7、9，小心看看這些個位數字會否存在規律（如接著的兩個個位數字會否是 3 和 1 呢？），即檢查當次方是 7 和 8，積的個位數字會否分別是 3 和 1。要檢查這個猜想是否正確，可以繼續計算下去：

$$\begin{aligned}7^7 &= 823543 \\7^8 &= 5764801\end{aligned}$$

將這些簡化問題所得出的結果記錄下來

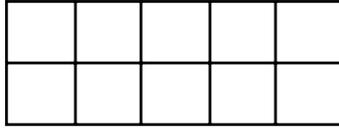
次方	1	2	3	4	5	6	7	8
個位數	7	9	3	1	7	9	3	1

從上表清楚可見，個位數字是依規律出現的： 7、9、3、1 ……。  
另外，當次方每增加 4 的時候，對應的個位數字便會再次重複循環出現。由於  $7^{50}$  的次方是 50，50 即  $4 \times 12 + 2$ 。因此， $7^{50}$  的個位數字應該與  $7^2$  相同，即  $7^{50}$  的個位數字是 9。

這個例子雖然以「簡化問題」策略來開始，但思考過程也有運用「列表」和「尋找規律」。一個成功的解題者往往能夠綜合運用已有知識和靈活選擇解題策略，不會永遠只依靠一道算式（formula）或單一種策略。

**練習**

1. 問下圖共有多少個長方形？



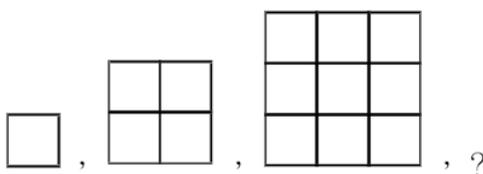
2. 讀了一本小說，第一天讀了全書三分之一多 5 頁，第二天讀了全書五分之二少 12 頁，第三天讀了剩下的 27 頁。這本小說共有多少頁？

3. 【客房安排】賓館接待一個旅行團，客房部只知道：如果 3 個房間各住 4 人，其餘房間各住 3 人，就會剩 9 人無房可住；如果 1 個房間住 3 人，其餘房間各住 5 人，就剛好住滿。問旅行團共有多少人？預訂了多少個房間？

### 3.6 尋找規律

我們日常生活中存在著很多不同的規律，它們是按某種規則有系統地重複出現。例如每一天的上、下午；每星期的七天等。很多數學題要求解題者在某一項數列找出下一個數字、字母或圖形，例如：

- 在數列 3, 6, 9, 12,  $\triangle$ , …… 中， $\triangle$ 代表甚麼數字？
- 在英文字串 M, A, T, H, M, A, T, H, M, …… 中，第 60 個字母是甚麼？
- 觀察下列圖形，試畫出下一個圖形。



這些問題往往需要解題者先分析各項數據之間有何關係、個別數據與其位置能否用數式表示等。如果解題者能夠發現當中的規律，這些問題便很容易解決。

例一：學校職員用彩旗佈置禮堂，依紅、黃、藍、綠的顏色次序編排。問第 63 面旗的顏色是甚麼？

**答案**：可以由第一面旗的顏色開始，依次序列寫出至第 63 面旗。

紅，黃，藍，綠，紅，黃，藍，綠，紅，黃，藍，綠，……

在列寫的過程中不難發現當中的規律，即每 4 次會構成一個循環，將此規律用表列出來。

彩旗顏色的規律

旗	位置		
紅	1	5	9
黃	2	6	10
藍	3	7	11
綠	4	8	12

由於  $63 \div 4 = 15 \cdots 3$ ，第 63 面旗的顏色是 \_\_\_\_\_。

例二：當  $\frac{1}{11}$  化成小數，第 2010 個小數點後的位置是甚麼數？

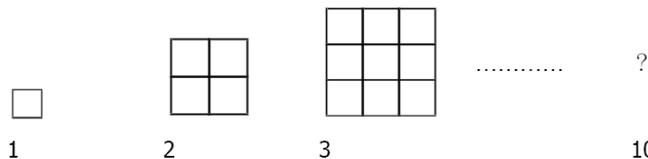
**答案**：將  $\frac{1}{11}$  化成小數，是 0.090909 …。

這個循環由「0」和「9」組成，「0」在小數點後的單數位而「9」在小數點後的偶數位，因此，第 2010 個小數點後的位置是 \_\_\_\_\_。

例三：在數列 4、7、6、6、8、5、10、4、△、3，△ 是什麼數值？

**答案**：這個數列可分拆成兩部分。首部分由奇數位組成，即 4、6、8、10、△，它們是相連的偶數。第二部份由偶數位組成，即 7、6、5、4、3，是退一的連續數。如果解題者能夠分出這兩組數字，便會從規律中找出 △ 的值是 \_\_\_\_\_。

例四：在下列圖形，第一幅是由 1 個基本單位組成，第二幅是由 4 個基本單位組成。如此類推，第 10 幅由多少個基本單位組成呢？



**答案**：能力較高的解題者可能很快已經知道答案是 100 了。如果還未有頭緒的話，可以先用列表的方式，寫出相關資料。基本單位的分佈表：

第__幅	有__排	每排有__個	共有__個
1	1	1	1
2	2	2	4
3	3	3	9
4	4	4	16
5	5	5	25
6	6	6	36
7	7	7	49
8	8	8	64
9	9	9	81
10	10	10	100

如果解題者未能從首 3 幅圖的資料找到規律，可以自行畫出第 4 幅圖，繪畫的過程或能令解題者理解到自己畫了 4 排，而每排有 4 個基本單位。經過細心觀察，解題者不難發現有多少排和每排有多少個是與圖的次序有關係的，而這個規律是可以數式表示。 $T = n \times n$ ， $n$  代表圖的次序而  $T$  代表基本單位的總數。當解題者用文字或數式來表示探究出來的規律，也應用已知的資料來驗算猜想是否正確，以減少無謂的錯誤。

**練習**

4. 【火柴棒數目】砌一個正方形要用 4 枝火柴棒，砌兩個要用 7 枝，砌 3 個要用 10 枝。依這方法砌 23 個正方形，要用多少枝火柴棒？

5. 【正多邊形的對角線】正 48 邊形有多少條對角線？

6. 求  $1993^{1993}$  的個位數。

7. 以下數字排列有甚麼特別？還有沒有類似排列？

1	9	2
3	8	4
5	7	6

### 3.7 溫氏圖

溫氏圖適合處理小組之間互有關聯的情況。一般會用圓形來表示個別小組(即集合)，兩圓相疊表示有一些個體同屬該兩個小組。圓形畫好後，須將已知資料填入回中間位置開始，慢慢往外直至所有相關資料用完。如有需要，可用代數符號表示未知部份。繪圖完成後，須檢查每個區域的數字與所知條件是否吻合。而每個圓內數的數字之和剛好是該小組組員人數，這項條件往往可幫助解題。

- **基數 (Cardinality)**

包含有限個元素的集合稱為有限集合 (finite set)。以  $n(A)$  表示一個有限集合  $A$  的元素數目，亦稱為  $A$  的基數 (cardinality)。在實際問題中，有時要計算具有某種性質的元素的數目。

本節目的就是討論怎樣解決有限集合元素的計數問題，在這裡我們介紹兩種方法。

(1) **包含排斥原理**

(2) **系數待定法**

以上是解決集合計數問題最基本的兩種方法，用包含排斥原理需要深刻理解集合表達式所表示的意義。而用系數待定法則要求能很準確劃出溫氏圖，弄清溫氏圖每一個區域及其數字所代表的含意。

- **包含排斥原理 (Principle of Inclusion and Exclusion)**

包含排斥原理也稱為容斥原理，它在組合計算中有着重要的用途。

定理 (包含排斥原理)：對任何兩個有限集合  $A$  及  $B$ ，有以下結果：

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)。$$

用溫氏圖表示包含排斥原理。

例子：某班有學生 48 人，其中有 23 人參加游泳隊，有 16 人參加田徑隊，有 8 人既參加游泳隊又參加田徑隊，問有多少人既不參加游泳隊也不參加田徑隊？

答案：設  $A = \{ \text{參加游泳隊的學生} \}$ ， $B = \{ \text{參加田徑隊的學生} \}$ 。

$n(A) =$  \_\_\_\_\_， $n(B) =$  \_\_\_\_\_， $n(A \cap B) =$  \_\_\_\_\_。因此，

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) =$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_。

既不參加游泳隊也不參加田徑隊的學生人數是 \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_ 人。

- 系數待定法

用系數待定結合溫氏圖的方法也可以很方便地解決有限集合的計數問題。

一般方法如下：

- (1) 首先根據已知的條件把對應的溫氏圖劃出來。一般地說，每一條性質決定一個集合。有多少條性質，就有多少個集合。如果沒有特殊的說明，就把任何兩個集合都劃成相交的。
- (2) 然後將已知集合的元素填入表示該集合的區域內。通常從幾個集合的交集填起，根據計算的結果將數字逐步填入所有的空白區域。如果交集的數字是未知的，可以設為未知數。
- (3) 根據題目中的條件，列出一方程或方程組，就可以求得所需要的結果。

例子：對 24 名會說外語的教職人員進行問卷調查，其統計結果如下：  
會說英、法、德、日語的人分別為 13, 9, 10 和 5 人，其中同時會說英語和日語的有 2 人，會說英、法和德語中任兩種語言的都是 4 人。已知會說日語的人既不懂法語也不懂德語，分別求只會說一種語言（英、法、德、日）的人數，和會說三種語言的人數。

答案：設  $A = \{ \text{會說英語的人} \}$ ， $B = \{ \text{會說法語的人} \}$ ， $C = \{ \text{會說德語的人} \}$ ， $D = \{ \text{會說日語的人} \}$ 。設  $x$  為同時會說三種語言的人數； $y_1$ ， $y_2$  和  $y_3$  分別表示只會說英、法或德一種語言的人數。先根據題意劃出溫氏圖：

**練習**

1. 某班有學生 25 人，其中 14 人會打籃球，12 人會打排球，6 人會打籃球和排球，5 人會打籃球和網球，還有 2 人會打這三種球。已知 6 個會打網球的人都會打籃球或排球。求不會打球的人數。

**答案：** 設  $A = \{ \text{會打排球的人} \}$ ， $B = \{ \text{會打網球的人} \}$ ， $C = \{ \text{會打籃球的人} \}$ 。  
設  $x$  為會打排球和網球，但不會打籃球的人數； $y_1, y_2$  表示只會打排球和只會打籃球的人數； $y_3$  表示不會打球的人數。先根據題意劃出溫氏圖：

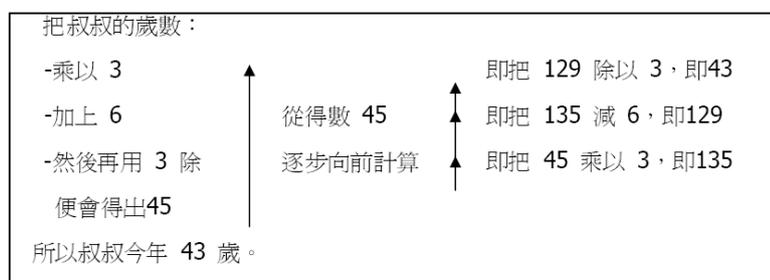
2. 一個問卷調查結果顯示九成老師喜歡以下最少一項活動：看戲，運動，睇書。  
45% 喜歡看戲； 48% 喜歡運動； 35% 喜歡睇書； 12% 喜歡看戲和睇書；  
20% 只喜歡看戲； 15% 只喜歡睇書。問有多少百分比的老師喜歡全部三項？

### 3.8 逆向思考

如果題目涉及一些步驟或過程，並提供最後的結果，老師可以指導學生運用逆向思考來尋找先前的資料及解決問題。

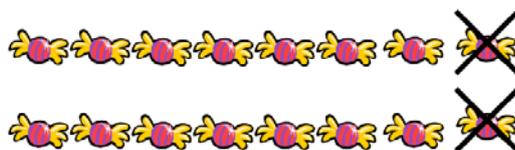
**例一：** 【叔叔歲數】小明到親戚家拜年，小明說：「你們用自己的年齡乘以 3，再加上 6，然後再用 3 除，把答案告訴我，我就能算出你們今年幾歲。」叔叔照小明說的算好了，告訴小明得數是 45。小明立刻說：「今年叔叔 43 歲。」小明用什麼方法能立刻知道叔叔的歲數？

**答案：** 叔叔說的 45 是怎樣來的？  
先把叔叔的歲數乘以 3，再加上 6，然後再用 3 除便會得出 45。  
怎樣才能利用這些資料找出叔叔的歲數？



**例二：** 【糖果數目】 兄妹二人共有糖 16 粒。妹妹吃了 2 粒，接著哥哥送了 5 粒糖給妹妹，二人的糖果數目便相同。問原本兄妹各有糖多少粒？

**答案：** 我們將一步一步先瞭解題目。



兄妹二人共有糖 16 粒，妹妹吃了 2 粒，剩下 14 粒。  
然後，逐步解決問題。剩下 14 粒：



最後二人的糖果數目相同，即每人 7 粒。  
哥哥先前送了 5 粒糖給妹妹，而妹妹最初吃了 2 粒糖。  
所以哥哥原本有糖 \_\_\_\_\_ 粒，妹妹原本有糖 \_\_\_\_\_ 粒。



### 3.9 邏輯推理

面對一個問題，如果能夠作出合乎邏輯的推理，問題或會容易解決。例如，「小強的爸爸有三個兒子，大兒子叫大牛，二兒子叫二牛，三兒子叫什麼名字呢？」，如果解題者不假思索，或會以為三兒子的名字是三牛。但細心理解問題後，知道小強、大牛和二牛的爸爸是同一個人，而這個爸爸有三個兒子，經過簡單的推理，便知道小強是小兒子了。

解決較複雜的問題時，邏輯推理往往會與其他策略一起綜合運用，這些策略包括列表、試誤、繪圖等。

例一：從以下兩幅圖可以表示哪一個小朋友最重呢？



**答案：**從第一幅圖得知，小明比小美重，可以用數學符號表示：

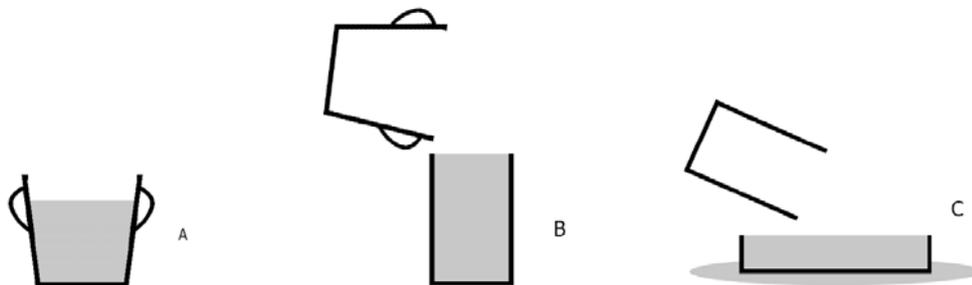
$$\text{小明} > \text{小美}$$

從第二幅圖得知，小美比大牛重，即

$$\text{小美} > \text{大牛}$$

簡單推理得知大牛最輕，而小明是最重的。

例二：小明有三個杯，A 杯盛了約半杯水，小明把 A 杯的水倒入 B 杯，剛好將 B 杯盛滿。小明再把 B 杯的水倒入 C 杯，水卻滿溢。哪一個杯的容最大？



**答案：**倒入同一個體積的水，B 杯剛好盛滿而 C 杯滿溢，因此 B 杯的容量比 C 杯大；倒入同一個體積的水，B 杯剛好盛滿而 A 杯仍未盛滿，簡單推理得知 A 杯的容量最大。

例三： 小玲請大家猜她的年齡，以下是她給予的提示：

「我還未到 18 歲，所以沒有投票權。」

「我的小妹是中二學生，已經 13 歲了。」

「我的年齡是一個質數。」

小玲今年多少歲呢？

**答案：** 第一個提示顯示小玲是 17 歲或以下，第二個提示顯示小玲已超過 13 歲了，因此她的年齡應該是 17, 16, 15 或 14 歲，而這四個數中，只有 17 是質數，所以符合全部三個提示，只有 17 歲才是合理答案了。

例四： 老師分別量度了美兒、小麗、志明和大強的高度，並說

「美兒比大強高。」

「大強不是最矮的。」

「志明比美兒高。」

誰是最矮呢？

**答案：** 將提示資料分析後，再用圖顯示第一個提示：



從第二個提示，推理出還有人比大強矮：



第三個提示表示：



將所有資料重組後，發現志明是最高的，跟著美兒和大強。小麗還沒有在圖中顯示，簡單推理便知道她是剩餘的一個，也是四個人之中最矮的一個。

練習

1. 數獨 ( Sudoku ) 問題：

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
2								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

2. 「我家有一個爺爺，一個嫲嫲，兩個爸爸，兩個媽媽，兩個兒子，一個孫子。」  
問你家有多少人？
3. 一個家庭有爸爸、媽媽、女兒、兒子。他們年齡之和是 73 歲，爸比媽大 3 歲，  
女比子大 2 歲，4 年前他們年齡之和是 58 歲。問他們今年各自多少歲？
4. 每一個英文字母代表一個數字，如果  $W=3$ ， $H=6$ ，甚麼是 RIGHT 和 WRONG？

$$\begin{array}{r} \text{WRONG} \\ + \text{WRONG} \\ \hline \text{RIGHT} \end{array}$$

### 3.10 應用工具

小學生學習某些數學課題時，會使用工具。例如學習除法前，學生可以把若干顆數粒平均分給二人，探究每人分得多少顆。這種使用數粒作均分的活動，有助學生建立整除的概念。同理，學生也可以應用工具解決數學問題。

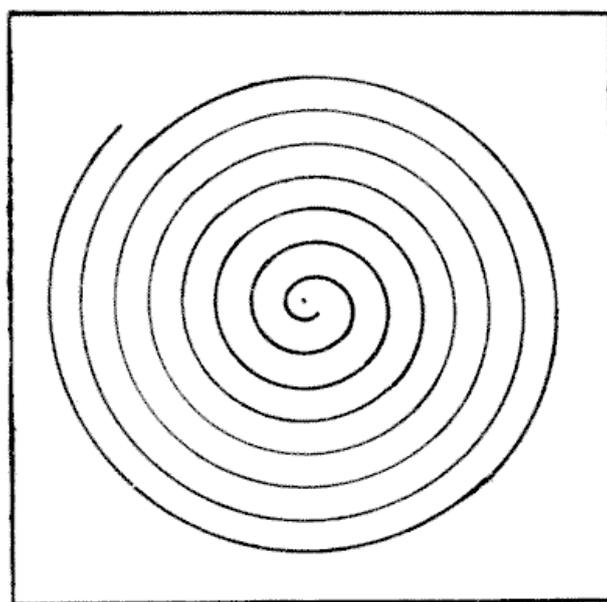
例一： 小欣，潔儀二人同時同地起步。小欣以每小時 2 公里往東行，潔儀則以每小時 1.5 公里往南行，兩小時後她們相距多少公里？

答案： 兩小時後，小欣離開原地東面 4 公里，潔儀則離開原地南面 3 公里。東面和南面成直角，可以用直尺畫出相關資料，並以厘米暫代公里。

用直尺量度兩端距離，得 \_\_\_\_\_ 厘米，即兩小時後她們相距 \_\_\_\_\_ 公里。

要解決此類問題，學生須要運用已有知識和量度工具。注意「應用工具」可以是真的量度工具，也可表示為數學應用工具如計算方程式（formula）。例子：計算多少個五位回文數時，我們須要借助數學應用工具如「計數的基本原則」。

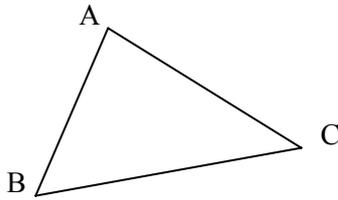
例二： 如何利用圓規（compass）畫出橢圓形（oval）？螺旋形（spiral）？



練習

1. 有正方形手工紙一張，其面積是 100 平方厘米。如何用該手工紙摺出一個面積是 50 平方厘米的正方形？

2. 把三角形 ABC 分為四個面積相等的三角形。



3. 四雙同樣質地同樣大小的袜子，兩雙白色，兩雙黑色。兩個盲人都想取一雙白色及一雙黑色，但却沒有別人幫助辨識顏色。該如何辦？

4. 小明家兄弟姊妹很多。一個男孩說：我的兄弟和我的姊妹一樣多。一個女孩說：我的兄弟比我的姊妹多一倍。問兄弟，姊妹各有幾個人呢？